Operatory na kratach Banacha

Zadania domowe, 24.01.2024

Zad 1. Zbiór częściowo uporządkowany $(X, \leq)$ nazywamy porządkowo zupełnym, lub też zupełnym w sensie Dedekinda, jeżeli każdy ograniczony z góry zbiór posiada supremum w X. Pokazać, że w tak zupełnej przestrzeni każdy zbiór ograniczony z dołu posiada infinium w X.

Zad 2. Pokazać, że operator liniowy $T : X \to Y$ pomiędzy dwoma kratami wektrowymi jest homomorfizmem krat wtedy i tylko wtedy, gdy $x \wedge y = 0$ implikuje $Tx \wedge Ty = 0$ dla wszystkich $x, y \in X$.

Zad 3. Niech X, Y kraty wektorowe. Rozważamy przestrzeni operatorów liniowych $L(X, Y)$ jako przestrzeń wektorową z porządkiem zadanym przez stożek operatorów dodatnich $L_+(X, Y)$. Pokazać, operator $T \in L(X, Y)$ jest regularny, czyli jest różnicą dwóch operatorów dodatnich, wtedy i tylko wtedy, gdy $T \leq S$ dla pewnego $S \in L_+(X, Y)$.

Zad 4. Pokazać, że przestzrzeń $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ miar znakowych na ustalonej przestrzeni mierzalnej (Ω, Σ) wraz z działaniami określonymi punktowo, tzn. $(\mu+\nu)(A) := \mu(A)+\nu(A)$, $(\lambda\mu)(A) := \lambda\mu(A)$ oraz

$$\mu \leq \nu \iff \mu(A) \leq \nu(A) \text{ dla każdego } A \in \Sigma.$$

jest kratą wektorową. Zinterpretować rozkład $\mu = \mu_+ - \mu_-$ oraz miarę $|\mu|$.

Zad 5. Pokazać, że krata wektorowa $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ z poprzedniego zadania jest kratą Banacha z normą $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$. Czy ta krata jest porządkowo zupełna?

Zad 6. Pokazać, że krata Banacha $L^p_\mu(\Omega)$, dla $p \in [1, \infty)$, jest porządkowo zupełna.